

散乱・吸収のある半無限一様媒質による反射率の近似

ふじい やすひろ <<http://mimosa-pudica.net>>

201804: 非等方散乱に対応したバージョンに書き換え中。小手先の修正なので途中式に不備が多いかも。
XXX: かきかけ。

概要

散乱・吸収のある半無限一様媒質による反射率の近似式を求める。放射伝達方程式の適当な基底で展開し二状態近似を行う。得られる近似式は定性的に良い性質を持つものの、最大で 10% 程度の誤差がある。しかし、一部の係数をフィッティングにより少し修正するなどの方法で精度を大幅に向上させることが可能である。ここでは Henyey-Greenstein 位相関数への対応と同時に精度の改善を行い、非常にシンプルな近似式を導出する方法を示した。

0 用いる記号

k_s [1/m]	: 散乱係数
k_a [1/m]	: 吸収係数
$I(t, \vec{x}, \vec{\omega})$ [W/m ² · sr]	: 位置 \vec{x} , 方向 $\vec{\omega}$ の放射輝度
$\vec{n}(\vec{\omega})$: $\vec{\omega}$ 方向の単位ベクトル
Ω_{z+}	: z^+ 半球立体角
Ω_{z-}	: z^- 半球立体角

近似式については文字にチルダをつけることとする。

1 方程式の近似解

散乱・吸収のある半無限一様媒質による反射率の近似式を求める。ここでの反射率は、空間・方向について一様な放射輝度をもつ環境光をあてたとき、入射する放射発散度 ($= \int d\Omega(\vec{\omega}) (\vec{n}(\vec{\omega}) \cdot \vec{N}) I(\vec{\omega})$; \vec{N} は境界面の法線ベクトル) と出射する放射発散度の比と定義する。

$z = 0$ を境界として $z < 0$ の空間に一様な媒質が存在し、 $z > 0$ の空間は真空である状況を考える (図 XXX)。以下、この状況下で放射伝達方程式 (radiative transfer equation; RTE) の近似解を求め、媒質への入射量と出射量の比から反射率を計算する。

一様媒質下での RTE は次式で表される。

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I(t, \vec{x}, \vec{\omega})}{\partial t} + \vec{n}(\vec{\omega}) \cdot \nabla I(t, \vec{x}, \vec{\omega}) = -(k_s + k_a) I(t, \vec{x}, \vec{\omega}) + \frac{k_s}{4\pi} \int d\Omega(\vec{\omega}') \Phi(\vec{n}(\vec{\omega}) \cdot \vec{n}(\vec{\omega}')) I(t, \vec{x}, \vec{\omega}'). \quad (1)$$

ここで $\Phi(\cdot)$ は位相関数 (phase function) と呼ばれる散乱の分布を表す関数で、

$$\Phi(\vec{n}(\vec{\omega}) \cdot \vec{n}(\vec{\omega}')) \geq 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega(\vec{\omega}') \Phi(\vec{n}(\vec{\omega}) \cdot \vec{n}(\vec{\omega}')) = 1, \quad (3)$$

を満たす。

状況設定から、方程式は t, x, y 方向について一様な解を持つと考えられる。この場合 θ を $+z$ とする角度として、

$$\cos\theta \frac{\partial I(z, \theta)}{\partial z} = -(k_s + k_a)I(z, \theta) + \frac{k_s}{2} \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' \Phi(\cos(\theta - \theta'))I(z, \theta'), \quad (4)$$

と簡略化される。

次に $I(\cdot)$ が立体角について Ω_{z+}, Ω_{z-} 上でそれぞれ一様に近いと仮定し、次のように展開する。 $h(\cdot)$ を階段関数として、

$$I(z, \theta) = h\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) I_\uparrow(z) + h\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) I_\downarrow(z) + \epsilon(z, \theta), \quad |\epsilon|, \left|\frac{\partial \epsilon}{\partial z}\right| \ll |I_\uparrow|, |I_\downarrow|. \quad (5)$$

RTE にこの展開式を代入し、両辺を Ω_{z+} 上で一様に立体角積分 ($\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta$) すると、

$$+\frac{1}{2} \frac{dI_\uparrow}{dz} = -(k_s + k_a)I_\uparrow + k_s[(1 - H)I_\uparrow + HI_\downarrow] + O(\epsilon). \quad (6)$$

$$\text{where } H := \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_\pi^{2\pi} d\theta' \Phi(\cos(\theta - \theta')). \quad (7)$$

H は下方向 (Ω_{z+}) に進んでいた光が散乱したとき上方向 (Ω_{z-}) を向く割合に相当し、この近似において位相関数 $\Phi(\cdot)$ の情報を受け持つ唯一の量である。

同様に Ω_{z-} で積分 ($\int_{\pi/2}^\pi d\theta \sin\theta$) すると、

$$-\frac{1}{2} \frac{dI_\downarrow}{dz} = -(k_s + k_a)I_\downarrow + k_s[HI_\uparrow + (1 - H)I_\downarrow] + O(\epsilon). \quad (8)$$

この近似計算は次の操作を行ったことに相当している。単位球面上で定義される実関数のなす空間に対し、内積を $\langle f, g \rangle := \int d\Omega(\vec{\omega}) f(\vec{\omega})g(\vec{\omega})$ で導入し、それぞれ Ω_{z+}, Ω_{z-} のみで一様な値を持つ関数 2 つを基底として含む直交関数系を用意する。この直交関数系で $I(\cdot)$ を立体角について展開し、係数について成り立つ方程式が (6), (8) である。

さて、 ϵ を無視して (6), (8) を連立させて解く (もちろん一般には、微分方程式の特定の項が小さいからといって無視できるとは限らない) と、一般解は $k_a \neq 0$ のとき A, B を任意の定数として、

$$I_\uparrow(z) = A(1 + P)e^{-\alpha z} + B(1 - P)e^{+\alpha z} \quad (9)$$

$$I_\downarrow(z) = A(1 - P)e^{-\alpha z} - B(1 + P)e^{+\alpha z} \quad (10)$$

$$\text{where } \alpha := 2\sqrt{k_a(2Hk_s + k_a)} \quad (11)$$

$$P := \sqrt{\frac{k_a}{2Hk_s + k_a}}. \quad (12)$$

次に境界条件を考える。真空部分について $I_\uparrow(z), I_\downarrow(z)$ は一定であり、 I_\downarrow が媒質への入射、 I_\uparrow が出射に対応している。媒質部分については $z = -\infty$ からの入射がないとして、境界条件

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} I_\uparrow(z) = 0, \quad (13)$$

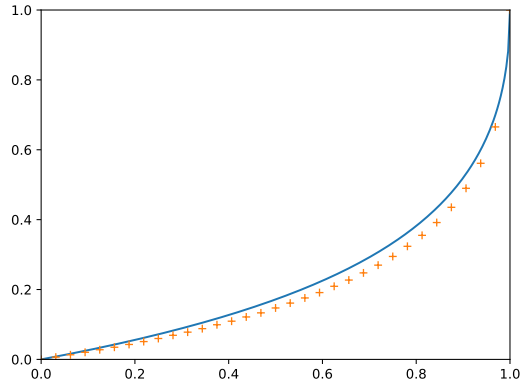


図1 $R(k_s, k_a = 1 - k_s, g = 0)$

が課される。また、屈折率が変わらないので、 $z = 0$ の境界では単純に $I_{\uparrow}(z), I_{\downarrow}(z)$ が連続であることが条件となる。

以上より、 $z = 0$ 平面から媒質へ入射した光の反射率を計算すると、

$$\tilde{R} = \frac{I_{\uparrow}(0)}{I_{\downarrow}(0)} = \frac{1 - P}{1 + P}. \quad (14)$$

半無限の媒質下で反射率は空間スケールに依存しないため、反射率は k_s と k_a の比のみで決まる。上式はこの性質を満たし、かつ $k_s \ll k_a \Rightarrow R \rightarrow 0$, $k_s \gg k_a \Rightarrow R \rightarrow 1$ となり、定性的に良い振る舞いをする近似になっている（この性質が成り立つかは、実は基底の取り方に依存している。例えば球面調和関数の低次を用いるとこの性質は成り立たない）。

具体的に $\Phi(\cdot)$ が定数、つまり等方散乱の場合にこの近似式を評価したものを図 (1) に示す。残念ながら最大で正しい値と 10% ほどずれていて、このままでは定量的にはそれほど良い近似ではない。

2 Henyey-Greenstein 位相関数への対応と近似式の改善

今、位相関数 $\Phi(\cdot)$ として Henyey-Greenstein 位相関数

$$\Phi(\mu, g) = \frac{1}{2} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g\mu)^{3/2}}, \quad -1 \leq g \leq 1, \quad (15)$$

を考える。対応する H を g の関数としてプロットすると、図 (2) のようになる。

$H(g)$ は初等関数では表せない（たぶん…）が滑らかな関数なので、適当な近似式を作るのは難しくない。しかし、ここでは次のようなアプローチを採ることで、近似式 (14), (12) の改善も同時に行う。

1. モンテカルロ計算によって様々な k_s, k_a, g から反射率 R を求めておく。
2. $H(g)$ を未知と考え、 $\{(k_s, k_a, g, R)\}$ から近似式 (14), (12) を用いて逆算する。

具体的に $k_s = 1 - k_a = 1/8, 2/8, \dots, 7/8$ ととって $H(g)$ を逆算すると、図 (3) のようになる。

近似式を逆算に用いているため $\Phi(\cdot)$ を積分した関数とはカーブが変化し、少し k_s, k_a 依存性が出ているが、

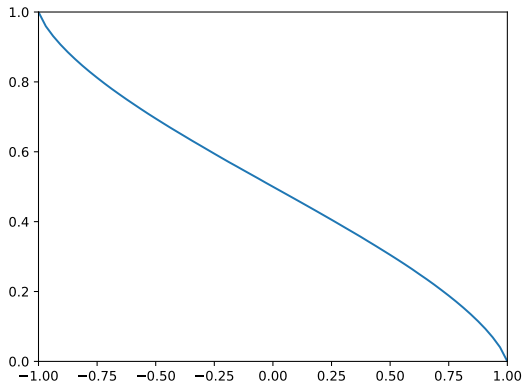


図2 $H(g)$

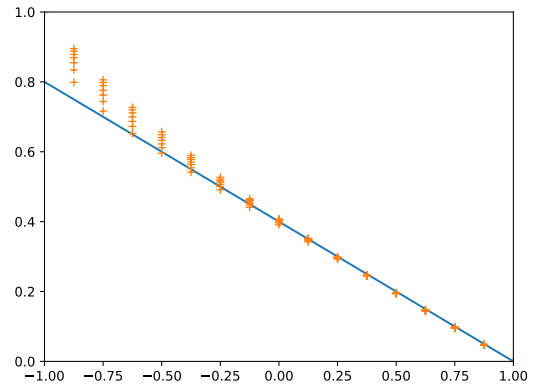


図3 $\tilde{H}(g)$

後方散乱が強くなければ

$$\tilde{H}(g) = \frac{\gamma}{2}(1-g) \quad \text{where } \gamma = 0.80, \quad (16)$$

という簡単な式で比較的良好に近似できることが分かる（このグラフ上での誤差がそのまま反射率 R の誤差になるわけではないことに注意）。

3 評価

** かきかけ **

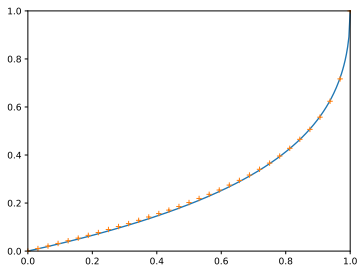


図4 $\tilde{R}(k_s, k_a = 1 - k_s, g = -0.5)$

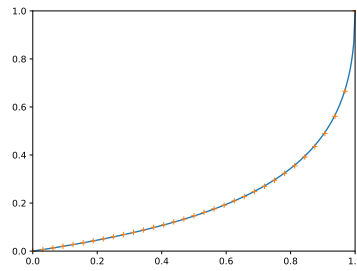


図5 $\tilde{R}(k_s, k_a = 1 - k_s, g = 0.0)$

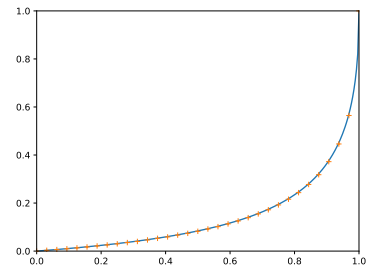


図6 $\tilde{R}(k_s, k_a = 1 - k_s, g = +0.5)$

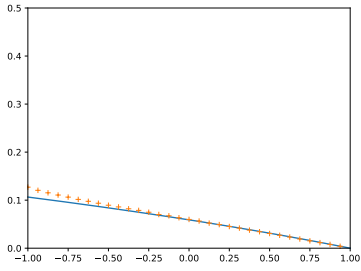


図7 $\tilde{R}(k_s = 0.25, k_a = 0.75, g)$

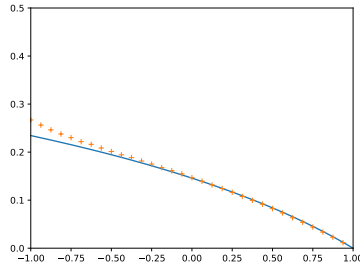


図8 $\tilde{R}(k_s = 0.50, k_a = 0.50, g)$

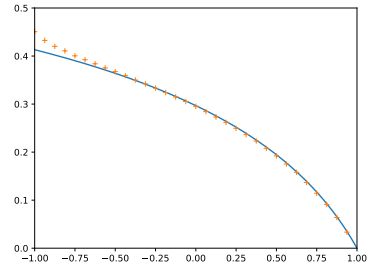


図9 $\tilde{R}(k_s = 0.75, k_a = 0.25, g)$

4 ここだけ読めばとりあえず使える

以上をまとめると、反射率 $R(k_s, k_a, g)$ の近似式が

$$\tilde{R} = \frac{1 - P}{1 + P} \quad (17)$$

$$\text{where } P = \sqrt{\frac{k_a}{\gamma(1-g)k_s + k_a}} \quad (18)$$

$$\gamma = 0.80. \quad (19)$$

として得られた。

この式の良い点として、逆変換、つまり反射率から散乱・吸収係数を求める式もシンプルな形をしていることが挙げられる。これは CG ソフトウェアなどで、反射色から媒質の散乱・吸収係数を設定する場合などに有用である。反射率 R と減衰係数 $k := k_s + k_a$ が与えられたとき、上式を k_s, k_a について解くと、